ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

PHẠM THỊ THU TRANG

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP BA VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DẠNG BA ĐIỂM VÀ DẠNG TÍCH PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ THU TRANG

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP BA VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DẠNG BA ĐIỂM VÀ DẠNG TÍCH PHÂN

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

TS. TRẦN ĐÌNH HÙNG

Thái Nguyên - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Phạm Thị Thu Trang

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Trần Đình Hùng, người thầy tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn. Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Phạm Thị Thu Trang

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$A \subset B$	A là tập con của B
$A \cup B$	hợp của hai tập hợp A và B
$A \cap B$	giao của hai tập hợp A và B
$A \times B$	tích Descartes của hai tập hợp A và B
$ker(f)$	hạt nhân của f
$Coker(f)$	đối hạt nhân của f
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

Phương trình vi phân cấp ba có nhiều ứng dụng đa dạng trong các lĩnh vực vật lý, kỹ thuật [1], [9]. Chẳng hạn như bài toán xét độ võng của một dầm ba lớp được tạo thành bởi các lớp song song các vật liệu khác nhau [8], bài toán nghiên cứu dòng chảy của một màng mỏng chất lỏng nhớt trên bề mặt rắn, khi một màng như vậy chảy xuống một vật liệu theo hướng thẳng đứng sẽ chịu ảnh hưởng của sức căng bề mặt, lực hấp dẫn cũng như độ nhớt [12]. Nhiều phương trình của hệ dao động cũng được đưa về các hệ phương trình vi phân cấp ba [11]. Trong các bài toán đó, các điều kiện biên được dẫn đến có thể ở dạng ba điểm, dạng tích phân hay các dạng phi tuyến.

Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân cấp ba đầy đủ với các loại điều kiện biên khác nhau thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học. Kỹ thuật khá phổ biến được sử dụng để nghiên cứu các phương trình vi phân cấp ba là phương pháp nghiệm trên và nghiệm dưới [6], [7] và các phương pháp liên tục dựa trên việc đánh giá tiên nghiệm của một họ các bài toán với một tham số thêm vào, sau đó sử dụng các Định lý về điểm bất động [2], [3], [4], [5].

Chúng tôi đã chọn luận văn “Sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân cấp ba với điều kiện biên dạng ba điểm và dạng tích phân”. Mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả của Abdelkader Boucherif [3], [4] về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân cấp ba đầy đủ:

$$y'''(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t)), \quad 0 < t < 1,$$

trong hai trường hợp, điều kiện biên Dirichlet ba điểm và điều kiện biên dạng tích phân.

Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở về một số định lí điểm bất động, toán tử Fredholm và hàm Green.

Chương 2 trình bày một số điều kiện đủ để đạt được đánh giá tiên nghiệm của một họ bài toán cho phương trình vi phân cấp ba đầy đủ trong hai trường hợp: điều kiện biên dạng ba điểm và điều kiện biên dạng tích phân. Sau đó sử dụng các định lý điểm bất động để chứng minh một số kết quả về sự tồn tại nghiệm.

Chương 1

Một số kiến thức cơ sở

Chương này trình bày một số kiến thức cơ sở cần thiết cho chương sau, được tham khảo từ các tài liệu [10], [13].

1.1 Một số định lý điểm bất động

Cho ánh xạ $T : A \to A$. Mỗi nghiệm x của phương trình $x = Tx$ được gọi là một điểm bất động của ánh xạ T.

Một số định lý điểm bất động sau đây là các định lý nền tảng cơ bản được sử dụng phổ biến trong chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của các phương trình vi phân.

1. Định lý điểm bất động Banach cho các toán tử co với hệ số co k.
2. Định lý điểm bất động Brouwer cho các toán tử liên tục trong không gian hữu hạn chiều.
3. Định lý điểm bất động Schauder cho các toán tử hoàn toàn liên tục trên một tập con lồi, khác rỗng và compact trong không gian Banach (vô hạn chiều). Đây là một tổng quát hóa của định lý bất động Brouwer.
4. Định lý điểm bất động Scheafer cho các toán tử liên tục và compact trong không gian Banach.

Ngoài ra một số định lý điểm bất động quan trọng khác được sử dụng nhiều trong nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân phi tuyến, chẳng hạn như định lý Leray - Schauder cho các toán tử compact trên một tập con lồi, khác rỗng, bị chặn của không gian Banach.

Cùng với các định lý điểm bất động, lí thuyết bậc Brouwer và lí thuyết chỉ số điểm bất động cũng là những công cụ quan trọng, được ứng dụng nhiều trong nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ liên tục cũng như sự tồn tại nghiệm của các phương trình vi phân phi tuyến.

Định lý điểm bất động Banach

Xét phương trình phi tuyến

$$x = Tx. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.1.1. (xem [13]) Toán tử $T : M \subseteq X \to X$ trên không gian metric (X, d) được gọi là co với hệ số k nếu và chỉ nếu

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1.2}$$

với mọi $x, y \in M$ và k cố định, $0 \leq k < 1$.

Định lý 1.1.2. (xem [13]) (Định lý điểm bất động Banach (1922))
Giả sử rằng
(i) $T : M \subseteq X \to M$ là một ánh xạ từ M vào chính nó;
(ii) M là tập đóng, khác rỗng trong không gian metric đầy đủ (X, d);
(iii) T là một ánh xạ co với hệ số k.
Khi đó phương trình (1.1) *có duy nhất nghiệm x, tức là T có duy nhất một điểm bất động trên M.*

Định lý điểm bất động Banach có ý nghĩa quan trọng trong giải tích, đặc biệt trong việc chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các phương trình phi tuyến.

Định lý điểm bất động Brouwer

Khác với Định lý điểm bất động Banach, Định lý điểm bất động Brouwer không chỉ ra tính duy nhất của điểm bất động, tuy nhiên các